Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc

Ministère de l'Éducation Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Eseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Rattrapage
Juillet 2009

■ Exercice Numéro 1 : (03,00 points)

Rappel : $(\mathbb{R},+,\times)$ est un corps commutatif : $0_{\mathbb{R}} = 0$; $1_{\mathbb{R}} = 1$.

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Soit : $V = \left\{ M(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \; ; \; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

0,75 **1** Montrer que V est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ puis donner une base de cet espace vectoriel V.

0,25 **2** **a** Montrer que V est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,50 **b** Montrer que $(V,+,\times)$ est un anneau unitaire et commutatif.

0,25 **3** **a** Calculer : $M\left(\frac{1}{2} ; \frac{-1}{4}\right) \times M\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$

0,25 **b** L'anneau $(V,+,\times)$ est-il un corps ?

0,50 **4** **a** Montrer que : $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 4b & a \end{pmatrix} \in V \quad \Longrightarrow \quad X^2 - 2aX + (a^2 - 4b^2)I = \theta$

0,50 **b** On suppose que $a^2 - 4b^2 \neq 0$ Montrer que X est inversible dans V.

■ Exercice Numéro 2 : (04,00 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1 Soit : (E) : $z^2 - 2(u + 1 - i)z + 2u^2 - 4i = 0$; $u \in \mathbb{C}\backslash\{(1-i)\}$

0,25 **a** Développer puis réduire le nombre complexe $(iu - 1 - i)^2$.

0,75 **b** Résoudre ainsi l'équation (E) dans l'ensemble des complexes.

2 Soient : $A\big((1+i)u - 2i\big)$; $B\big((1-i)u + 2\big)$; $U(u)$; $\Omega(2 - 2i)$.

Soit I le milieu du segment $[AB]$ et t la translation définie ainsi :

$$t = t_{\vec{w}} \; : \; \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ U & \longmapsto & I \end{array}$$

0,25 **a** Déterminer : $aff(I)$; $aff(\vec{w})$.

Soit $\mathcal{R}$ la rotation définie ainsi :

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}\left(\Omega, \frac{-\pi}{2}\right) \; : \; \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

0,50 b Montrer que : $\mathcal{R}(A) = B$.

0,50 c En déduire que les droites (AB) *et* (ΩI) sont perpendiculaires.

0,75 d Établir un programme de construction des points A *et* B depuis U.

3 Soit : $u = a(1+i) - 2i$; $a \in \mathbb{R}$.

0,50 a Calculer $aff(\overrightarrow{AU})$; $aff(\overrightarrow{AB})$ en fonction du nombre réel a .

0,50 b En déduire que les points A ; B ; U sont colinéaires.

■ Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4.
On dispose de trois urnes : U_1 ; U_2 ; U_3 .
L'urne U_1 contient une boule rouge et $(n-1)$ boules noires .
L'urne U_2 contient une boule rouge et $(n-2)$ boules noires .
L'urne U_3 contient une boule rouge et $(n-3)$ boules noires .
On désigne au hasard une urne puis on tire au hasard et spontanément deux boules de cette urne. Soit X la variable aléatoire qui prend le nombre de boules rouges tirées.

0,50 1 Déterminer les valeurs possibles que cette variable peut prendre.

0,50 2 a Montrer que : $p[X=2] = \dfrac{8}{3n(n-1)}$

0,50 b Montrer que : $p[X=1] = \dfrac{4(3n-7)}{3n(n-1)}$

0,75 c En déduire la loi de probabilité de cette variables aléatoires.

0,75 3 Quelle est la probabilité d'un tirage de l'urne U_3 sachant que les deux boules tirées sont blanches.

■ Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

I Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ ainsi :

$$g(x) = 2(1 - e^{-x}) - x$$

1,00 1 Étudier la monotonie de g puis dresser son tableau de variations.

0,50 2 a Montrer que : $\exists!\ \alpha \in\,]\ln 4\,;\ln 6[$; $g(\alpha) = 0$.

0,50 b Étudier le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}^+$.

3 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie ainsi :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2(1 - e^{-u_n}) \quad ; \quad \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

0,50 a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $1 \leq u_n \leq \alpha$.

0,25 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N})$; $u_{n+1} - u_n = g(u_n)$.

0,25 c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante.

0,50 d) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente puis donner sa limite.

II Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1-e^x}{x^2}$$

Soit $(\mathcal{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ avec : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$.

1,00 **1** Calculer les limites suivantes : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

0,50 **2** a) Vérifier que : $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha(\alpha-2)}$

0,75 b) Montrer que : $\forall x > 0$; $f'(x) = \dfrac{e^x\, g(x)}{x^3}$

Puis dresser le tableau de variations de la fonction f .

0,50 **3** Tracer la courbe $(\mathcal{C})$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

0,50 **III** On considère la fonction définie ainsi :

$$\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{1-e^t}{t^2}\right) dt \quad ; \quad \forall x > 0 \\ F(0) = -\ln 2 \end{cases}$$

0,50 **1** a) Montrer que : $\forall x > 0$; $F(x) = \left(\dfrac{e^{2x}-1}{2x}\right) - \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right) - \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt$

0,50 b) Montrer que : $\forall x > 0$; $e^x \ln 2 \leq \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt \leq e^{2x} \ln 2$

0,50 c) Calculer $\lim_{x\to 0^+} \displaystyle\int_x^{2x} \left(\frac{e^t}{t}\right) dt$ Puis montrer que F est continue en 0^+

0,50 **2** a) Montrer que : $\forall x > 0$; $F(x) \leq \dfrac{1-e^x}{2x}$

0,50 b) Calculer la limite suivante : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$

0,75 **3** Montrer que F est dérivable sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et que :

$$\forall x > 0 \quad ; \quad F'(x) = \frac{-1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)^2$$

0,25 **4** a) Montrer que : $(\forall x > 0), (\exists\, c \in]0,x[)$; $F(x) - F(0) = \dfrac{-1}{2}\, x\, e^{2c}$

0,25 b) Montrer que : $\forall x > 0$; $\dfrac{-1}{2}\, e^{2x} \leq \dfrac{F(x) - F(0)}{x} \leq \dfrac{-1}{2}$

0,25 c) En déduire que F est dérivable à droite en zéro et $F'_d(0) = \frac{-1}{2}$.